2do parcial MA2112. Tipo A

Abril-Julio 2008.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

Resolución

1. (12 ptos.) Considere la integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{y^2} f\left(x,y\right) dxdy$$

(a) Dibuje la región de integración.
(b) Intercambie el orden de integración.

Lo primero que debemos de hacer para resolver este ejercicio es interpretar los límites de integración y el orden de integración, en donde claramente se ve que primero integra con respecto a x y luego a y, así que nos queda: $-1 \leq y \leq 1$, $y-1 \leq x \leq y^2$.
Donde $y-1 = x \equiv y = 1+x$ que es una recta de pendiente 1 y sabemos graficar, y^2 es una parábola positiva sobre el eje y
Una vez sabiendo esto y el interalo de y, podemos graficar la región, la cual llamaremos D.

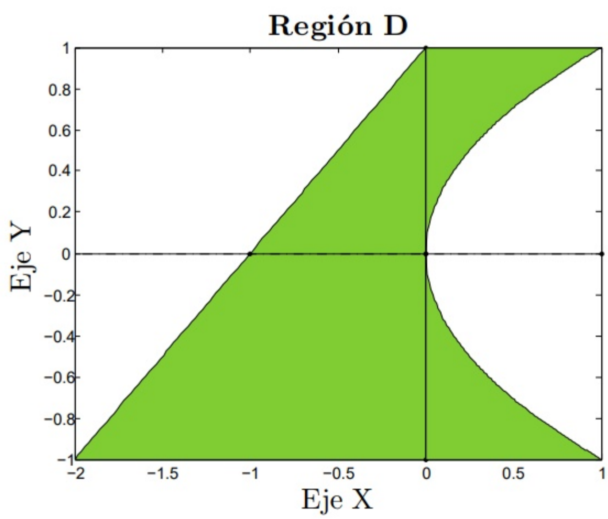


Figura 1: Región de integración de $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{y^2} f\left(x,y\right) dxdy$

Ahora para intercambiar los límites de integración, debemos hacer que y quede en función de x y definir el intervalo de ésta. En la gráfica se observa que $-2 \leq x \leq 1$ ¿Por qué esto? Sustituyamos los dos extremos del intervalo de y y obtendremos estos valores, que a su vez corresponden a los extremos del intervalo de x.Debemos de encontrar las funciones $y\left(x\right)$ que representan a la región de integración, para ello despejamos y de las dos funciones que delimitaban nuestra región en la integral inicial:

$$y^2 = x \quad \Rightarrow \quad |y| = \sqrt{x} \text{ En donde definimos el valor absoluto: } |y| = \begin{cases} y & si \quad y \geq 0 \\ -y & si \quad y < 0 \end{cases}$$

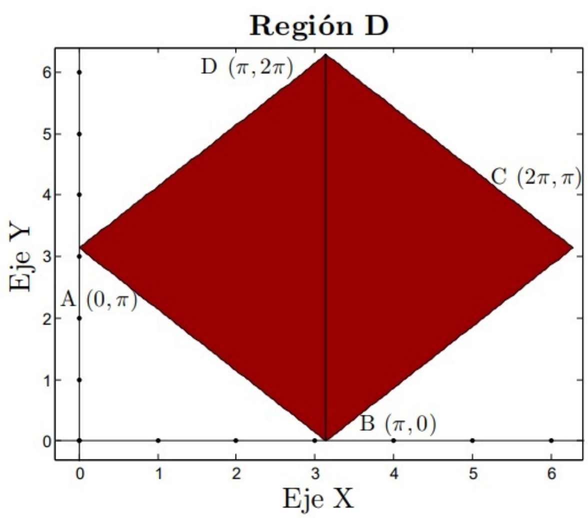
Lo cual nos indica que la imagen de la función cambiará en $y = 0$, la otra función que delimita la región de integración es $y = x + 1$. Por lo cual procedermos a dividir la región de integración en 3 partes y quedaría de la siguiente manera:

$$\int_{-2}^{0} \int_{-1}^{x+1} f(x, y)\, dydx + \int_{0}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} f(x, y)\, dydx + \int_{0}^{1} \int_{-1}^{-\sqrt{x}} f(x, y)\, dydx$$

2. (13 ptos.) Sea D el paralelogramo de vértices: $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$. Resuelva la siguiente integral usando el cambio de variables: $u = x - y$, $v = x + y$.

$$\int\int_{D} (x - y)^2 \cos^2(x + y)\, dxdy$$

Lo primero que haremos será graficar la región D y marcar cada uno de los 4 vértices.



Veamos si el cambio de variables propuesto es válido, para ello debemos de comprobar que $T(u, v)$ sea de clase C^1 e inyectiva en D^* que vendría siendo la nueva región.

Al sumar $u + v$ obtenemos: $u + v = 2x \Rightarrow x = \dfrac{u + v}{2}$. Sustituyendo en $v = x + y \Rightarrow y = \dfrac{v - u}{2}$.

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow T(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{u+v}{2} \\ \\ \dfrac{v-u}{2} \end{pmatrix} = \begin{cases} h_1 = \dfrac{u+v}{2} \\ \\ h_2 = \dfrac{v-u}{2} \end{cases}$$

Tanto h_1 como h_2 son funciones polinómicas que por definición son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ $\therefore$ $T(u, v)$ también es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ y en D^* al ser composición de éstas. Veamos el determinante del Jacobiano, éste debe de ser $\neq 0$ para que $T(u, v)$ sea inyectiva.

$$|DetD_T| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \neq 0 \therefore T(u, v) \text{ es inyectiva}$$

Ahora procedamos a graficar D^*, para ello parametrizaremos los segmentos de recta en cada uno de los vértices:

$\overline{AB}$: Hallaremos la pendiente de la recta para construir la recta que define este tramo y la variación de x dentro del mismo, para luego expresarlo todo en función de u y v.

$$m = \frac{2\pi - \pi}{\pi - 0} = 1 \Rightarrow (x - \pi) = y - 2\pi \Rightarrow x + \pi = y \Rightarrow \frac{u}{2} + \frac{v}{2} + \pi = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \Rightarrow u = -\pi$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{v+u}{2} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{v-\pi}{2} \leq \pi \Rightarrow \pi \leq v \leq 3$$

Aplicaremos el mismo procedimiento con el resto de los segmentos de recta.

$\overline{BC}$:

$$m = \frac{2\pi - \pi}{\pi - 2\pi} = -1 \Rightarrow -1\,(x - \pi) = y - 2\pi \Rightarrow 3\pi - x = y \Rightarrow 3\pi - \frac{u}{2} - \frac{v}{2} = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \Rightarrow 3\pi = v$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow \pi \leq \frac{u+v}{2} \leq 2\pi \Rightarrow 2\pi \leq u + 3\pi \leq 4\pi \Rightarrow -\pi \leq u \leq \pi$$

$\overline{CD}$:

$$m = \frac{\pi - 0}{2\pi - \pi} = 1 \Rightarrow (x - \pi) = y \Rightarrow x - \pi = y \Rightarrow \frac{u}{2} + \frac{v}{2} - \pi = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \Rightarrow u = \pi$$

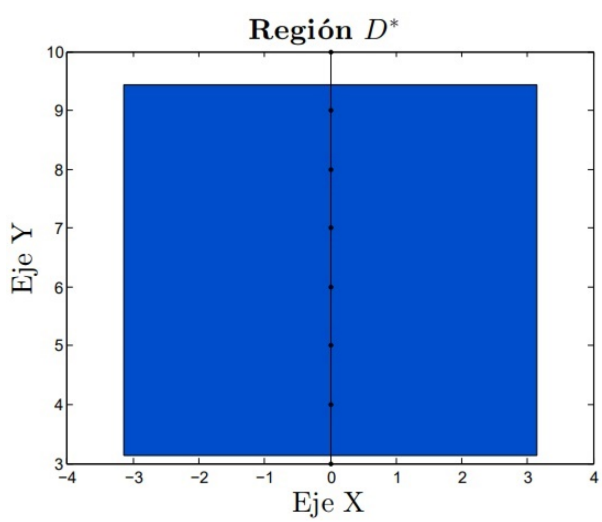
$$\pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow \pi \leq \frac{u+v}{2} \leq 2\pi \Rightarrow 2\pi \leq v + \pi \leq 4\pi \Rightarrow \pi \leq v \leq 3\pi$$

$\overline{DA}$:

$$m = \frac{\pi - 0}{0 - \pi} = -1 \Rightarrow -1\,(x - 0) = y - \pi \Rightarrow \pi - x = y \Rightarrow \pi - \frac{u}{2} - \frac{v}{2} = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \Rightarrow \pi = u$$

$$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{u+v}{2} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq v + \pi \leq 2\pi \Rightarrow -\pi \leq v \leq \pi$$

Habiendo obtenido estos datos procedemos a graficar D^*.



Observamos que la región de integración es más sencilla de definir en los intervalos de integración. Procedemos a realizar la integral, recordando que:

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_{D^*} T(u,v)\,|DetD_T|\,dudv$$

Por lo cual debemos de resolver la siguiente integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{u^2\cos^2(v)}{2}dvdu = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{u^2}{2}\left(\int_{\pi}^{3\pi}\frac{dv}{2}+\int_{\pi}^{3\pi}\frac{\cos(2v)}{2}dv\right)du$$

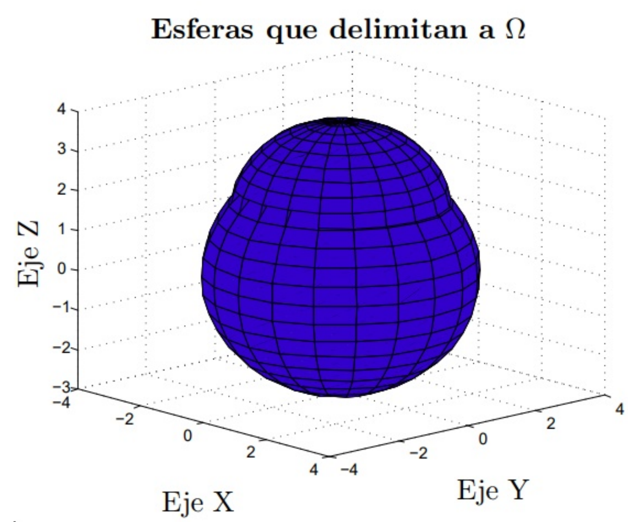
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\left(\frac{2\pi}{2}+\frac{\sin(6\pi)-\sin(2\pi)}{4}\right)du = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2du = \frac{\pi}{6}\left(\pi^3-(-\pi)^3\right) = \frac{\pi^4}{3}$$

Con lo cual podemos concluir que:

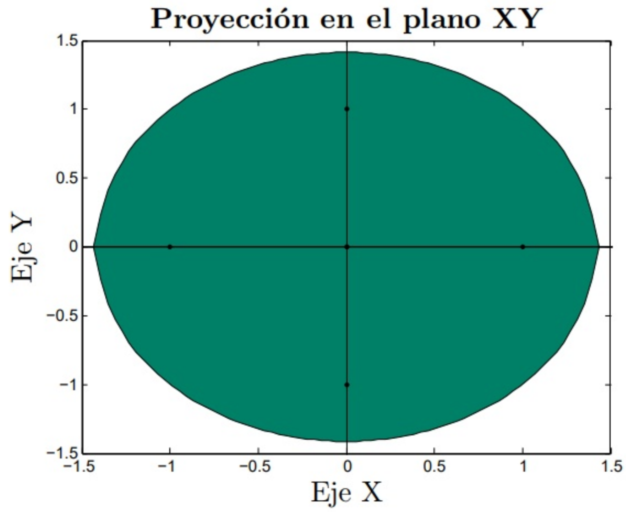
$$\Rightarrow \int\int_D (x-y)^2\cos^2(x+y)\,dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi}\frac{u^2\cos^2((v))}{2}dvdu = \frac{\pi^4}{3}$$

3. (12 ptos.) Sea Ω el conjunto de los puntos interiores a las esferas de ecuaciones: $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=2$. Halle el volumen de Ω.

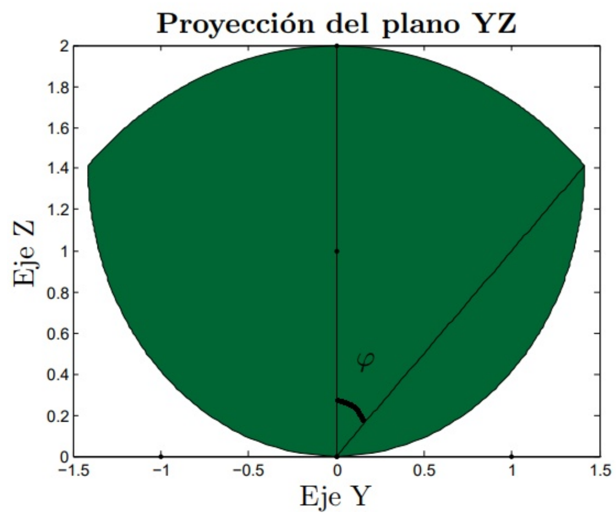
Lo primero que haremos será graficar las dos esferas, la primera de éstas es una esfera de radio 2 centrada en el origen, la segunda tiene radio $\sqrt{2}$ y está centrada en $\left(0,0,\sqrt{2}\right)$



Para calcular el volumen Ω utilizaremos coordenadas esféricas, para ello procederemos a proyectar el sólido en el plano XY y el plano YZ.



En donde observamos que el cuerpo abarca los cuatro cuadrantes y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Hagamos lo mismo para YZ.



Aquí se detalla que el radio del sólido será el de la esfera mayor hasta cierto ángulo y luego de allí el radio será el de la esfera menor, para determinar dónde ocurre este cambio veamos dónde se interceptan ambas esferas.

$$\left\{ \begin{array}{lcc} x^2+y^2+z^2=4 & \Rightarrow & x^2+y^2=4-z^2 \\ x^2+y^2+\left(z-\sqrt{2}\right)^2=2 & \Rightarrow & x^2+y^2=2-\left(z-\sqrt{2}\right)^2 \end{array} \right. \Rightarrow 4-z^2=2-\left(z-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2=z^2-z^2+2\sqrt{2}z-2 \Rightarrow 2\sqrt{2}z=4 \Rightarrow z=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Por lo cual las esferas se intersectan en $z=\sqrt{2}$. Ahora apliquemos el cambio de variable a coordenadas esféricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y=r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z=r\cos(\varphi) \end{array} \right. \quad \text{Y su Jacobiano viene dado por: } r^2\sin(\varphi).$$

$$\text{Recordemos que: } \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin(\varphi)\, drd\theta d\varphi$$

Para hallar el valor de φ utilizaremos el punto donde se inertesectan las esferas:

$$z = \sqrt{2} \Rightarrow r\cos(\varphi) = \sqrt{2}. \text{ Utilizaremos el valor del radio de la esfera mayor:}$$

$$2\cos(\varphi) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Esto también nos indica que el sólido tendra el radio de la esfera de radio pequeña para $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Procedamos a hallar los radios para cada uno de los dos casos:

I. Si $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$:

Sustituimos de la ecuación de la esfera mayor:

$$r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\varphi) = 4$$

$$r^2\sin^2(\varphi)\left(r^2\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta)\right) + r^2\cos^2(\varphi) = 4$$

$$r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

Pero como el radio mínimo de la espera menor (respecto al orígen) es $0 \Rightarrow 0 \leq r \leq 2$.

II. Si $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$:

Para este caso sustituimos los cambios de variables en la ecuación de la esfera menor:

$$r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta) + \left(r\cos(\varphi) - \sqrt{2}\right)^2 = 2$$

$$r^2\sin^2(\varphi)\left(r^2\sin^2(\theta)\right) + r^2\cos^2(\varphi) - 2\sqrt{2}r\cos(\varphi) + 2 = 2$$

$$r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) + 2\sqrt{2}r\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow r^2\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) - 2\sqrt{2}r\cos(\varphi) = 0$$

$$r^2 - 2\sqrt{2}r\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow r\left(r - 2\sqrt{2}\cos(\varphi)\right) = 0$$

En donde obtenemos $0 \leq r \leq 2\sqrt{2}\cos(\varphi)$. Planteamos las integrales para calcular el volumen:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 r^2\sin(\varphi)\, drd\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sqrt{2}\cos(\varphi)} r^2\sin(\varphi)\, drd\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\sin(\varphi)}{3} d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{3} d\varphi d\vartheta$$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos(\varphi)$ para la segunda integral y calculamos los nuevos límites de integración.

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-8}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \frac{16\sqrt{2}u^3}{3} dud\theta = \frac{16\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \int_0^{2\pi} \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(0 - \frac{1}{4}\right) d\theta$$

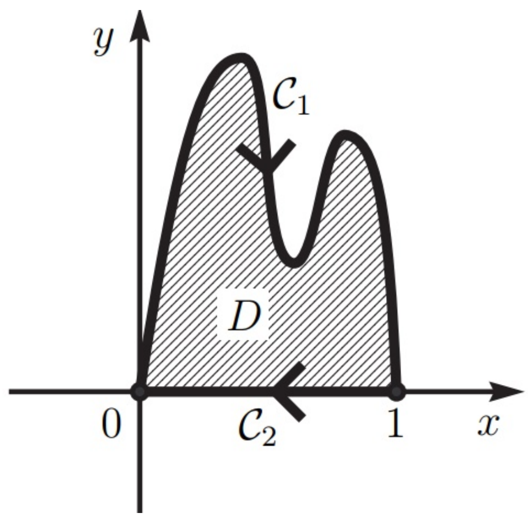
$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} = 2\pi\left(\frac{8}{3} - \sqrt{2}\right)$$

Entonces concluimos:

$$V = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin(\varphi)\, drd\theta d\varphi = 2\pi\left(\frac{8}{3} - \sqrt{2}\right)$$

4. (12 ptos.) Sean C_1 y C_2 las curvas de clase C^1 que se muestran en la figura. C_1 va de $(0,0)$ a $(1,0)$ y C_2 va de $(1,0)$ a $(0,0)$. Ambas encierra a la región elemental D de área $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calcular, usando el Teorema de Green:

$$\int_{C_1} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy$$



Ahora para poder aplicar el teorema de Green debemos verificar que C_1 sea una curva suave cerrada a trozo y que esté orientada en sentido antihorario. Observamos que no es cerrada, pero la unión de $C_1 y C_2$ sí lo es, entonces podemos aplicar el teorema con ésta; pero tiene sentido horario, así que invertimos el sentido a la misma.

Veamos si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son de clase C^1 en D.

$$\oint_{C_1 \cup C_2} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy = \oint_{C_1 \cup C_2} \left\langle \begin{pmatrix} 5e^x - 2y \\ x + e^{\sin(y)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \oint_{C_1 \cup C_2} \langle F, ds \rangle$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^x - 2y \\ x + e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$$

Recordando que:

$$\oint_{C_1 \cup C_2} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy$$

$$= \int_{C_1} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy + \int_{C_2} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy$$

Tanto P como Q son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ $\therefore$ F es de clase C^1 en D, procedamos a aplicar el teorema de Green.

$$\oint_{C_1 \cup C_2} \langle F, ds\rangle = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D (1+2)\, dxdy = 3\text{Área(D)} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ahora calculemos: $\displaystyle\int_{C_2} \langle F, ds\rangle$. Para ello parametrizamos el segmento de recta.

$$0 \leq x \leq 1,\ y = 0 \Rightarrow \sigma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \sigma'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ F(\sigma(t)) = \begin{pmatrix} 5e^t - 2(0) \\ t + e^{\sin(0)} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 5e^t \\ t+e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 5e^t dt = 5e - 5$$

Ahora calculamos $\displaystyle\int_{C_1} \langle F, ds\rangle$ (En sentido antihorario)

$$\int_{C_1} \langle F, ds\rangle = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \int_{C_2} \langle F, ds\rangle = \frac{3}{\sqrt{2}} - 5e + 5$$

$\therefore \displaystyle\int_{C_1} \langle F, ds\rangle$ (en sentido horario) es:

$$\int_{C_1} (5e^x - 2y)\, dx + \left(x + e^{\sin(y)}\right) dy = 5e - \frac{3}{\sqrt{2}} - 5$$

Notificar en caso encontrar algún error.

Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve

Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.